Έστω $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη.
Επίσης ισχύει ότι $f(0)=0$, $f(1)=1$ και $f(2)=1$

i) ΝΔΟ $\exists c_1\in(0,1) : f'(c_1)=1$

ii) ΝΔΟ $\exists c_2\in(1,2) : f'(c_2)=0$

iii) ΝΔΟ $\exists c\in(0,2) : f'(c)=\frac{1}{3}$

ΛΥΣΗ

i) • f συνεχής στο $[0,1]$

• f παραγωγ. στο $(0,1)$.

Άρα, από ΘΜΤ. $\exists c_1\in(0,1): f'(c_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{1}{1}=1$

ii) • f συνεχής στο $[1,2]$

• f παραγωγ. στο $[1,2]$

• $f(1)=f(2)=1$

Άρα, από Θ. Rolle $\exists c_2\in(1,2): f'(c_2)=0$.

iii) $\frac{1}{3}\in(0,1) \Rightarrow 0<\frac{1}{3}<1 \Rightarrow f'(c_2)<\frac{1}{3}<f'(c_1)$

Ενώ $f'(c_2)\neq f'(c_1)$.

Άρα, από Θεώρημα Darboux

$\exists c\in(0,2): f'(c)=\frac{1}{3}$ με $(c_2,c_1)\subseteq(0,2)$.